

Forme semi-locale des feuilletages legendriens

Saâdi Benabbés^a, Camille Laurent-Gengoux^b Zobida Souici-Benhammadi^a

^a*Départ. de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie*

^b*Institut Elie Cartan de Lorraine, Campus de Metz, France*

Résumé

Nous donnons une forme canonique semi-locale pour les feuilletages legendriens sur une variété de contact. Ce résultat généralise une forme canonique locale donnée par Libermann et Pang au voisinage d'une sous-variété de Legendre transverse, et est à mettre en parallèle avec un résultat semi-local de Weinstein dans le cas symplectique. Au cours de la démonstration, nous introduisons une classe de cohomologie qui mesure l'obstruction à rendre plat un feuilletage en modifiant la forme de contact.

Abstract

Semi-local form of Legendrian foliations. We describe a semi-local canonical form for Legendrian foliations on contact manifolds in the neighbourhood of a Legendrian submanifold. This result generalizes local results by Libermann and Pang on Legendrian foliations on contact manifolds, and is analogous to a semi-local result by Weinstein in the symplectic case. For the proof, we introduce and use a class of cohomology that obstructs the possibility to make a Legendrian foliation flat.

Abridged English version

Weinstein [9] proved that a neighbourhood of a Lagrangian submanifold transverse to a given Lagrangian foliation is symplectomorphic to the cotangent bundle of the transverse manifold. Under, this isomorphism, the leaves of the Lagrangian foliation correspond to the fiber the cotangent bundle. The cotangent bundle is therefore the unique semi-local model for Lagrangian foliations in a neighbourhood of a Lagrangian and transverse submanifold. For contact manifolds, what correspond to Lagrangian foliations (resp. submanifolds) are Legendrian foliations (resp. submanifolds). Libermann [6] and Pang [8] have established that, for a Legendrian submanifold transverse (in a sense given by (1), which is not the usual sense) to a Legendrian foliation, the local model is the jet bundle. There is however, a function

Email addresses: saadibenabbesfr@yahoo.fr (Saâdi Benabbés), camille.laurent-gengoux@univ-lorraine.fr (Camille Laurent-Gengoux), zbenhamadi2000@yahoo.fr (Zobida Souici-Benhammadi).

that comes into the picture and whose failure of being constant measures the non-flatness of the initial foliation. The purpose of the present note is to describe the semi-local model in this same very context.

Our work is mainly based on ideas and results by Libermann [6], but it adds to them a new cohomological idea (which is in some sense implicit in [6]). More precisely, we construct a class of cohomology that obstructs the possibility to gauge the contact form by multiplication by a non-zero function in order to make it flat - i.e. the Reeb vector has a flow that preserves the foliation. In the neighbourhood of a transversal Legendrian manifolds, this obstruction class is zero, and therefore allows to gauge the contact form to find a simplified semi-local model, then to "un-gauge" it to find the semi-local model for the initial contact form.

In short, there are two main results in this paper. The first one states that there is a class in the H^1 of functions constant on the leaves of a Legendrian foliation \mathcal{F} on a contact manifold (M, θ) which vanishes if and only if there is a non-zero function F such that \mathcal{F} is flat with respect to the contact form $F\theta$. The second one is the following:

Theorem 0.1 *Let (M, θ) be a contact manifold equipped with a Legendrian foliation \mathcal{F} . Any Legendrian submanifold N of M transverse to \mathcal{F} in the sense that, for all $n \in N$:*

$$T_n N \oplus T_n \mathcal{F} \oplus \langle \eta \rangle = T_n M, \quad (1)$$

*admits a neighbourhood diffeomorphic to a neighbourhood of the zero section in the space of jets, namely $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N$, through a diffeomorphism that maps N to the zero section, that maps \mathcal{F} on the fibers of the projection $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$ and maps θ to a 1-form that reads $Hdt + \lambda$ with H a function that never vanishes in a neighbourhood of the zero section and λ the Liouville form on T^*N .*

1. Introduction

Soit (M, θ) une variété de contact [3,7] de dimension $2n + 1$. On appelle *feuilletage legendrien* un feuilletage \mathcal{F} dont les feuilles sont des sous-variétés de dimension n telles que, en tout point $m \in M$, l'espace tangent $T_m \mathcal{F}$ à la feuille passant par m est compris dans le noyau de θ .

De même que toute variété symplectique de dimension $2n$ admet localement des coordonnées de Darboux, dont le modèle local est un voisinage de la section nulle dans $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, munie de la forme canonique $\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$, il est bien connu [3] que toute variété de contact a pour modèle local le fibré des jets, c'est-à-dire un voisinage de la section nulle dans $T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, munie de la forme canonique $dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i$. Dans le cas symplectique, lorsqu'un feuilletage lagrangien est donné, ce difféomorphisme local peut être choisi de sorte que le feuilletage se transporte sur les fibres de la projection canonique $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Y. Pang [8] et particulièrement P. Libermann [6] démontrèrent que, dans le cas d'une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien, ce feuilletage legendrien peut aussi être transporté sur les fibres de la projection canonique $T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dans ce cas néanmoins, l'expression de la forme de contact ne peut pas être totalement simplifiée, mais on obtient seulement qu'elle est de la forme :

$$Hdt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad (2)$$

où H est une fonction qui dépend en général de toutes les variables $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n, t$ et ne s'annule jamais dans un voisinage de la section nulle.

Dans le cas symplectique, ces théorèmes locaux ont été généralisés en des théorèmes semi-locaux, c'est-à-dire valables au voisinage d'une sous-variété N lagrangienne transverse à un feuilletage lagrangien, par Weinstein [9]. Dans cette note, nous proposons un analogue semi-local en géométrie de contact et au

voisinage d'une sous-variété legendrienne N tranverse (en un sens donné dans l'équation (??), sens qui diffère du sens usuel) au feuilletage legendrien.

Notre idée est en fait de se ramener au cas plat, c'est-à-dire au cas où la fonction H qui apparaît dans (2) peut être choisie constante - ce qui revient à supposer que le feuilletage legendrien est préservé par le champ de Reeb. Un feuilletage legendrien \mathcal{F} n'est évidemment pas toujours plat, mais si on autorise à multiplier la forme de contact par une fonction qui ne s'annule jamais, on peut localement rendre \mathcal{F} plat. Une classe de cohomologie, qui se trouve dans une cohomologie naturellement associée au feuilletage, va donner une obstruction à la possibilité de faire cette opération globalement. Il se trouve qu'au voisinage d'une sous-variété de Legendre transverse, cette classe d'obstruction s'annule, ce qui permet la simplification.

Nous aimerions préciser aussi que notre résultat semi-global diffère de celui obtenu par Pang [8] sur les feuilletages legendriens. Celui-ci en effet obtient des résultats semi-globaux, voire globaux, mais en considérant le cas où les feuilles sont compactes et simplement connexes, ce qui ne peut jamais être lorsqu'on se place au voisinage d'une transversale.

2. Une obstruction à la platitude des feuilletages de Legendre

Soit (M, θ) une variété de contact de dimension $2n + 1$, et η son champ de Reeb. On munit (M, θ) d'un feuilletage de Legendre \mathcal{F} . On dit que \mathcal{F} est *plat pour* θ si la forme fondamentale définie par Y. Pang [8] ainsi :

$$-\iota_\eta \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \theta = \iota_{[X, \eta]} \wedge_Y d\theta \quad \text{pour tous champs de vecteurs } X, Y \text{ tangents à } \mathcal{F}$$

est nulle (notons que cette notion correspond à la notion de feuilletage ω -complet chez [6]). Plus simplement, ainsi qu'il découle¹ des propositions 2.4, 2.6 et du corollaire 2.10 de P. Libermann [6], le feuilletage legendrien \mathcal{F} est plat pour θ si et seulement si le champ de Reeb η préserve \mathcal{F} .

On dira qu'un feuilletage legendrien \mathcal{F} sur une variété de contact (M, θ) sur une variété de contact est *applatissable* s'il existe une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^*)$ telle que \mathcal{F} soit plat pour la forme de contact $f\theta$. Notons que si une telle fonction existe, on peut la choisir strictement positive. Nous allons dans cette section caractériser en terme cohomologiques les feuilletages de Legendre applatissables.

Lemme 2.1 *Soit N une variété et soit H une fonction, définie dans un voisinage de N dans $T^*N \times \mathbb{R}$, qui ne s'annule jamais. Il existe un voisinage de N dans $T^*N \times \mathbb{R}$ sur lequel :*

- (i) $Hdt + \lambda$ est une forme de contact (ici λ désigne la forme de Liouville sur T^*N),
- (ii) l'application m_H de $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow T^*N \times \mathbb{R}$ définie par

$$(\alpha, t) \mapsto (H\alpha, t) \text{ pour tous } \alpha \in T^*M, t \in \mathbb{R},$$

est un difféomorphisme sur son image,

- (iii) *Ce difféomorphisme échange les formes de contact $H(dt + \lambda)$ et $((m_H^{-1})^*H)dt + \lambda$.*

Preuve. Soit x_1, \dots, x_n un système de coordonnées locales sur $\mathcal{U} \subset M$, p_1, \dots, p_n les coordonnées duales sur le $T^*\mathcal{U}$ de sorte que $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, t)$ est un système de coordonnées sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$. Le premier point de ce lemme se démontre par un calcul direct en coordonnées locales : on peut aussi utiliser le théorème 3.3 dans [6]. Le second point vient de ce que, dans ces coordonnées, m_H s'écrit :

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, t) \mapsto (x_1, \dots, x_n, H(x, p, t)p_1, \dots, H(x, p, t)p_n, t),$$

et de ce que la différentielle de cette application est un multiple de l'identité en tout point où $p_1 = \dots = p_n = 0$, le coefficient de multiplication étant $H(x, 0, t)$. Le dernier point vient de ce que le tiré en arrière

1. Résultat qui fut ensuite redémontré dans [4], lemme 4.2

de $H(x, p, t)(dt + \sum_{i=1}^n p_i dx_i)$ par m_H est $H(x, \frac{p}{H(x, p, t)}, t)dt + \sum_{i=1}^n p_i dx_i$, comme un calcul direct le montre. \square

Proposition 1 Soit (M, θ) une variété de contact.

- (i) Tout feuilletage de Legendre est localement applatissable.
- (ii) Soit \mathcal{F} un feuilletage de Legendre plat pour θ et $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^*)$. Le feuilletage \mathcal{F} est plat pour $f\theta$ si et seulement si f est constant sur les feuilles du feuilletage \mathcal{F} .

Preuve. Le premier point de cette proposition découle du troisième point du lemme 2.1 et du théorème 3.3 dans [6]. Pour le second point, il est connu (voir par exemple Marle-Libermann [7]) que pour toute fonction $f \in C^*(M, \mathbb{R}_+^*)$, $f\theta$ est encore une forme de contact et que son champ de Reeb est $\frac{\eta}{f} + \mathcal{X}_{\ln(f)}$ où $\mathcal{X}_{\ln(f)}$ est le champ hamiltonien de $\ln(f)$. \square

Nous allons construire une classe dans le premier espace de cohomologie du faisceau des fonctions constantes sur les feuilles du feuilletage \mathcal{F} , faisceau que l'on notera encore \mathcal{F} , dont les sections sur un ouvert $\mathcal{U} \subset M$ sont notées $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

Par le premier point du lemme 1, il existe un recouvrement $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de M et, pour chaque indice $i \in I$, une fonction $f_i \in C^\infty(\mathcal{U}_i, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i}$ soit plat pour $f_i\theta$. Quitte à remplacer f_i par $-f_i$, on peut supposer que ces fonctions sont strictement positives.

Pour toute paire d'indice $(i, j) \in I^2$, la fonction $f_{ij} := f_i/f_j$ est telle que \mathcal{F} est à la fois plat pour la forme de contact $f_i\theta$ et pour la forme de contact $f_j\theta = f_{ji}f_i\theta$. Le second point du lemme 1 implique que $f_{ij} \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{ij}}$, et donc que $\ln(f_{ij}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{ij}}$. Cette dernière famille de fonctions vérifie évidemment :

$$\ln(f_{ij}) + \ln(f_{jk}) + \ln(f_{ki}) = \ln(f_i) - \ln(f_j) + \ln(f_j) - \ln(f_k) + \ln(f_k) - \ln(f_i) = 0$$

et donc définit une classe dans le premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{F})$ du faisceau \mathcal{F} , classe que l'on notera $[Obs(\theta, \mathcal{F})]$.

Théorème 2.2 Soit (M, θ, \mathcal{F}) une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien \mathcal{F} . La classe $[Obs(\theta, \mathcal{F})] \in H^1(\mathcal{F})$ est bien définie ² et vérifie $[Obs(\theta, \mathcal{F})] = [Obs(F\theta, \mathcal{F})]$ pour toute fonction $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^*)$. De plus, les points suivants sont équivalents :

- (i) $[Obs(\theta, \mathcal{F})] = 0$,
- (ii) le feuilletage \mathcal{F} est applatissable.

Preuve. Le second point du lemme 1 implique qu'un autre choix des fonctions f_i ci-dessus serait de la forme $h_i f_i$, où les fonctions h_i appartiennent à $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_i}$, ce qui revient à remplacer $\ln(f_{ij})$ par $\ln(f_{ij}) + \ln(h_i) - \ln(h_j)$, autrement dit à ajouter un cobord.

De plus $[Obs(\theta, \mathcal{F})] = 0$ si et seulement si il existe un recouvrement \mathcal{U}_i et des fonctions h_i appartenant à $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_i}$ telles que $\ln(f_{ij}) + \ln(h_i) - \ln(h_j) = 0$. Pour tout indice i , la forme $h_i\theta$ est une forme de contact globalement définie sur M et le feuilletage est plat pour cette forme. La réciproque est évidente. \square

Dans le cas des feuilletages de Legendre \mathcal{F} , il y a une notion de *sous-variété transverse* qui consiste ³ à exiger que pour tout n dans la variété transverse N :

$$T_n N \oplus T_n \mathcal{F}_n \oplus \langle \eta \rangle = T_n M \tag{3}$$

Des considérations cohomologiques générales et le théorème 2.2 impliquent le résultat suivant.

Corollaire 2.3 Soit (M, θ, \mathcal{F}) une variété de contact munie d'un feuilletage de Legendre \mathcal{F} . Toute sous-variété N transverse au feuilletage (au sens donné par (3)) admet un voisinage \mathcal{V} auquel la restriction du feuilletage \mathcal{F} est applatissable.

². Autrement dit, ne dépend pas des choix faits lors de sa construction

³. La terminologie est ici trompeuse : une variété transverse à un feuilletage de Legendre n'est pas transverse au feuilletage.

Preuve. Ce corollaire vient tout simplement de ce qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de N sur lequel $H^1(\mathcal{F}) = 0$. Ceci vient à son tour de ce qu'il existe un voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}$ tel que l'image de l'application $N \times \mathbb{R} \rightarrow M$ définie par $(n, t) \mapsto \varphi_t(n)$ (φ_t étant le flot du champ de Reeb) est une sous-variété N' transverse (au sens usuel) au feuilletage \mathcal{F} et donc un voisinage \mathcal{V} de N' dans M sur lequel le feuilletage \mathcal{F} définit une fibration sur N' dont les fibres sont, topologiquement, des boules ouvertes. Sur cet ouvert, on a évidemment un isomorphisme entre $H^1(M, \mathcal{F})$ et le H^1 du faisceau des fonctions lisses sur N , lequel est nul. Le théorème 2.2 permet alors de conclure. \square

3. Forme semi-locale des feuilletage de Legendre plats

Nous donnons maintenant un résultat semi-local dans le cas plat.

Proposition 3.1 *Soit (M, θ) une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien plat. Toute variété legendrienne N transverse⁴ au feuilletage \mathcal{F} admet un voisinage difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans l'espace des jets $T^*N \times \mathbb{R}$ par un difféomorphisme qui*

- (i) échange N et la section nulle de $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N$,
- (ii) échange \mathcal{F} et les fibres de la projection $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$
- (iii) échange la forme θ et la 1-forme $dt + \lambda$, où λ est la forme de Liouville sur T^*N .

Preuve. Quitte à se restreindre à un voisinage \mathcal{V} de N dans M , on peut supposer que l'union $N_{\mathcal{F}}$ des feuilles de $\mathcal{F}|_{\mathcal{V}}$ qui intersectent N est une sous-variété (de dimension $2n$) de $\mathcal{V} \subset M$. La forme $d\theta$, restreinte à $N_{\mathcal{F}}$, est symplectique. Pour cette forme $\omega := d\theta|_{N_{\mathcal{F}}}$, le feuilletage \mathcal{F} est un feuilletage lagrangien et N est une sous-variété lagrangienne. Par un théorème de Weinstein, il existe un voisinage de $p(N)$ dans $N_{\mathcal{F}}$ isomorphe, via un difféomorphisme Ψ , à un voisinage de la section nulle dans T^*N , difféomorphisme qui échange ω et la 2-forme canonique du cotangent, que l'on note encore ω , et qui échange la restriction de \mathcal{F} à $N_{\mathcal{F}}$ avec les fibres de la projection $T^*N \rightarrow N$.

Comme le champ de Reeb est transverse à la sous-variété $N_{\mathcal{F}}$ et conserve le feuilletage, l'application $\Phi : T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$ définie par :

$$(\alpha, t) \mapsto \phi_t(\Psi(\alpha)).$$

où ϕ_t est le flot du champ de Reeb, est un difféomorphisme d'un voisinage \mathcal{W} de la section nulle dans l'espace des jets $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ dans un voisinage de N dans M que l'on appellera encore \mathcal{V} .

Montrons que ce difféomorphisme Φ convient ce pour quoi il suffit de démontrer que $\theta' = \Phi^*\theta$ coïncide avec $dt + \lambda$, les conditions (i) et (ii) étant évidemment vérifiées.

Commençons par établir quelques propriétés. Comme Φ échange le champ de Reeb η avec le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$, ce dernier est le champ de Reeb de θ' , soit :

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \theta' = 1 \text{ et } \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \theta' = 0 = 0 \quad (4)$$

Comme la restriction à $T^*N \times \{0\}$ de $d\theta'$ coïncide avec la forme symplectique canonique de cet espace, les relations (4) impliquent la relation suivante :

$$d\theta' = d\lambda. \quad (5)$$

Comme la section nulle et les fibres de la projection sont des sous-variétés legendriennes, on a aussi :

$$\theta'|_N = 0 \text{ et } \theta'|_F = 0 \text{ pour toute fibre de la projection canonique.} \quad (6)$$

4. Ce qui signifie, on le rappelle, que l'équation (3) est satisfaite, et diffère du sens usuel.

Toutes ces propriétés impliquent que θ' coïncide avec $dt + \lambda$ et achève donc la preuve de (iii). Pour commencer, la partie gauche de (4) implique que $\theta' = dt + \mu_t$ où μ_t est, pour tout t , une 1-forme sur T^*N . La partie droite de (4) implique que cette 1-forme ne dépend en fait pas de t . On la note par μ . Par (5), la 1-forme $\theta' - \lambda - dt = \mu - \lambda$ vérifie $d(\mu - \lambda) = 0$. Ceci implique que, localement, $d(\mu - \lambda) = dg$ pour une certaine fonction g qui ne dépend pas de t . La partie gauche de (6) implique que g est constante le long des fibres de la projection canonique, et provient donc d'une fonction h sur N . La partie droite de (6) implique alors que cette fonction h est à son tour constante, et donc que $\mu = \lambda$, ce qui implique (iii) et achève la démonstration du théorème. \square

4. Forme semi-locale des feuilletage de Legendre : cas général

Soit (M, θ, \mathcal{F}) une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien, et N une sous-variété de Legendre transverse au feuilletage. Le corollaire 2.3 implique qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ telle que \mathcal{F} est plat pour $f\theta$, pourvu que l'on se restreigne à un voisinage suffisamment petit de N . Par la proposition 3.1, il existe un difféomorphisme Φ de variétés de Legendre entre un voisinage \mathcal{U} de N dans M et un voisinage de la section nulle $(T^*N \times \mathbb{R}) \rightarrow N$ qui envoie \mathcal{F} sur le feuilletage naturel $\tilde{\mathcal{F}}$ et $f\theta$ sur la forme de contact naturelle $dt + \lambda$. En conséquence, Φ envoie la forme de contact θ sur $F(dt + \lambda)$, où $F = \Phi^*f$ est une fonction qui ne s'annule jamais sur un voisinage de la section nulle. Le lemme 2.1 donne alors le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Soit (M, θ) une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien. Toute variété legendrienne N transverse⁵ au feuilletage \mathcal{F} admet un voisinage difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans l'espace des jets $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ par un difféomorphisme qui*

- (i) échange N et la section nulle de $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N$,
- (ii) échange \mathcal{F} et les fibres de la projection $T^*N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$
- (iii) échange la forme θ et la 1-forme $Hdt + \lambda$, où H est une fonction sur $T^*N \times \mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais sur un voisinage de la section nulle et où λ est la forme de Liouville sur T^*N .

Références

- [1] B. Cappelletti-Montano, Bi-Legendrian structures and paracontact geometry. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **6**, (2009), pp 487-504.
- [2] B. Cappelletti-Montano, A note on Legendre foliations. AIP Conference Proceedings, **1360**, (2011), pp. 99-105.
- [3] D.E. Blair, *Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics, **203**, (2010).
- [4] N. Jayne, Contact metric structures and Legendre foliations, *New Zeland Journal of Mathematics*, **27**, (1998), pp 49-65.
- [5] N. Jayne, A note on the sectional curvature of Legendre foliations. *Yokohama Math. J.*, **41**, (1994), pp 153-161.
- [6] P.Libermann, Legendre foliations on contact Manifolds. In *différential Geometry its Applications*, **1**, (1991), pp 57-76.
- [7] P.Libermann and C.M. Marle, *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, (1987).
- [8] M.Y.Pang, The Structures of Legendrian Foliations, in *Transaction of American Mathematical Society*, **320**, (1990), pp 417-455.
- [9] A.Weinstein, Symplectic Manifolds and their Lagrangien submanifolds, *Adv.in Math* **71**, pp 329-346.

5. Ce qui signifie, on le rappelle, que l'équation (3) est satisfaite, et diffère du sens usuel.